19 вариант.

1. Проверить выводимость в исчислении высказываний методом Куайна, методом редукции, методом резолюций

$$A \to B \vdash (C \vee A) \to (C \vee B)$$

Метод Куайна.

Требуется, чтобы $(A \to B) \to ((C \vee A) \to (C \vee B))$ при любых A, B, C было равно единице.

формула будет равна единице, если

$(A \to B) = 0$ или $(C \vee A) \to (C \vee B) = 1$

$(C \vee A) \to (C \vee B) = 1$ при $A = B = C = 1$

при C или $B = 1$,

при A и $C = 0$.

$A \to B = 0 \quad A = 1, \ B = 0$

$1 \to 0 = 0$

То есть при любых значениях A, B, C выражение равно $1 \Rightarrow$ формула выводима б) метод редукции

Прямая редукция.

$A \to B \vdash (C \vee A) \to (C \vee B)$.

$\overline{A \to B} \vee ((C \vee A) \to (C \vee B)) =$ (требуется тождеств. рав. единице)

$= \overline{\bar{A} \vee B} \vee \overline{C \vee A} \vee C \vee B =$

$= A \cdot \bar{B} \vee \bar{C} \cdot \bar{A} \vee C \vee B =$ (формула де Моргана $\overline{a \vee b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$)

$= A \vee B \vee \bar{C}\bar{A} \vee C =$ ($a \vee \bar{a}b = a \vee b$)

$= A \vee B \vee \bar{C} \vee C = 1$ формула верна.

Обратная редукция.

$(A \to B) \cdot \overline{(C \vee A) \to (C \vee B)} =$ (доказываем равенство нулю).

$= (\bar{A} \vee B) \cdot \overline{(\overline{C \vee A}) \vee (C \vee B)} =$

$= (\bar{A} \vee B) \cdot (\overline{\overline{C \vee A}}) \cdot \overline{(C \vee B)} =$ (формула де Моргана $\overline{a \vee b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$; двойное отрицание $\bar{\bar{a}} = a$)

$= (\bar{A} \vee B) \cdot (C \vee A) \cdot \bar{C} \cdot \bar{B} =$

$= (\bar{A}C \vee \bar{A}A \vee BC \vee BA) \cdot \bar{C} \cdot \bar{B} =$

$= \bar{A}C \cdot \bar{C}\bar{B} \vee BC \cdot \bar{C}\bar{B} \vee BA \cdot \bar{C}\bar{B} = 0$

формула верна.

в) метод резолюций.

$A \to B \vdash (C \vee A) \to (C \vee B)$.

Переведем в КНФ, вывод берется с отрицанием. Цель - получение пустого дизъюнкта.

1. $A \to B = \bar{A} \vee B$

2. $\overline{(C \vee A) \to (C \vee B)} = \overline{\overline{(C \vee A)} \vee (C \vee B)} = \overline{\overline{(C \vee A)}} \cdot \overline{(C \vee B)}$.

получаем:

1 $\bar{A} \vee B$

2 $C \vee A$

3 $\bar{C}$

4 $\bar{B}$

5 (1,4) $\bar{A}$

6. (2,5) C.

7. (3,6) $\square$ вывод верен, получен пустой дизъюнкт.

2. Пусть Ω - множество людей. На множестве Ω зададимы предикаты

1 $E(x, y) = И \Leftrightarrow x, y$ - один и тот же человек.

2. $P(x, y) = И \Leftrightarrow x$ - родитель y.

3. $C(x, y) = И \Leftrightarrow x$ и y - супруги.

4 $M(x) = И \Leftrightarrow x$ - мужчина.

5 $W(x) = И \Leftrightarrow x$ - женщина.

С использованием этих предикатов записать формулы:

У некоторых людей есть сестры.

3. Привести формулы к предваренной форме.

$(\exists x \forall y A(x,y)) \vee (\exists x \forall y B(x,y))$.

Вынесем кванторы вперед, используем тавтологию $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x) = \exists x (P(x) \vee Q(x))$.

в $B(x,y)$ заменим переменную y на z.

$\exists x \forall y \forall z (A(x,y) \vee B(x,z))$ - форма ПНФ.

4. Построить машину Тьюринга для перевода из одной конфигурации в другую.

На ленте написаны нули и единицы, причем пустые ячейки содержат нули.

Проверить работу машины для конкретных x, y, z.

$q_1 1^x \Rightarrow q_0 1^y$ y - целая часть $x/3$.

Считывающая головка под самым левым символом слова x. $A=\{1\}$ 0-пустая ячейка

$q_1 1 \to q_2 * R$

$q_2 1 \to q_3 * R$

$q_3 1 \to q_4 * L$

$q_4 * \to q_4 * L$

$q_4 0 \to q_5 0 R$

$q_4 1 \to q_5 1 R$

$q_5 * \to q_6 1 R$

$q_6 * \to q_6 * R$

$q_6 1 \to q_2 * R$

$q_6 0 \to q_7 0 L$

$q_7 * \to q_7 0 L$

$q_7 1 \to q_0 1 H$

$q_2 0 \to q_7 0 L$

$q_3 0 \to q_7 0 L$

Проверим на $x=4$

На ленте $q_1 11110$

$q_1 11110 \to q_2 1110 \to **q_3 110 \to ***q_4 10 \to$

$\to **q_4 *10 \to *q_4 **10 \to q_5 ***10 \to 1q_6 **10 \to$

$\to 1*q_6 *10 \to 1**q_6 10 \to 1***q_2 0 \to 1**q_7 *0 \to$

$\to 1**q_7 00 \to 1*q_7 000 \to 1q_7 0000 \to q_0 10000.$

На ленте $q_0 10\ldots$ $\left[\frac{4}{3}\right]=1.$

5. Показать примитивную рекурсивность функции

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & y < x \\ 1 & y \geq x. \end{cases}$$

Примитивно-рекурсивная функция - функция, выражаемая с помощью операторов подстановки и примитивной рекурсии

Всякая примитивно-рекурсивная функция может быть выполнена на машине Тьюринга, то есть для доказательства реализуем функцию на МТ.

$$f = \begin{cases} 0 & y < x \\ 1. & y \geq x \end{cases}$$

На ленте $\underbrace{1 \ldots 1}_{x} 0 \underbrace{1 \ldots 1}_{y}$

0 - пустая ячейка.

Считывающая головка под самым левым символом слова x.

$q_1 1 \to q_2 * R$

$q_2 1 \to q_2 1 R$

$q_2 0 \to q_3 0 R$

$q_3 1 \to q_4 * L$

$q_4 * \to q_4 * L$

$q_4 0 \to q_5 0 L$

$q_5 * \to q_5 * L$

$q_5 1 \to q_2 * L$

$q_3 * \to q_3 * R$

$q_3 0 \to q_6 0 L$

$q_6 * \to q_6 * L$

$q_6 0 \to q_7 0 L$

$q_7 * \to q_7 0 L$

$q_7 1 \to q_7 0 L$

$q_7 0 \to q_0 0 H$

$q_5 0 \to q_8 0 R$

$q_8 * \to q_9 1 R$

$q_9 * \to q_9 0 R$

$q_9 0 \to q_{10} 0 R$

$q_{10} * \to q_{10} 0 R$

$q_{10} 0 \to q_{11} 0 L$

$q_{11} 0 \to q_{11} 0 L$

$q_{11} 1 \to q_0 1 H$

Проверка $\overset{x}{1}1 0 \overset{y}{1}$ $(x > y)$

$q_1 1101 \to * q_2 101 \to * 1 q_2 01 \to * 1 0 q_3 1 \to$

$* 1 0 q_4 * \to * 1 q_5 0 * \to * * q_2 0 * \to * * q_3 * \to * * 0 * q_3 \to$

$\to * * 0 * q_6 \to * * 0 q_6 0 \to * * q_7 0 0 \to * 0 q_7 0 0 \to q_0 0 0 0 0$